

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Кафедра будівельної механіки

Методичні вказівки

до виконання розрахунково-графічних робіт

з дисципліни

Опір матеріалів

для студентів денної форми навчання за спеціальністю
192 «Будівництво та цивільна інженерія»

Тернопіль
2018

УДК 620.10(07)
М54

Укладач:
Ясній В.П., докт. філос.

Рецензент:
Довбуш А.Д., старший викладач.

Методичний посібник розглянуто й затверджено на засіданні
кафедри будівельної механіки
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 1 від 27 серпня 2018 р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні методичної ради
факультету по інженерії машин, споруд та технологій
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 1 від 31 серпня 2018 р.

М 54 Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з
дисципліни «Опір матеріалів» для денної форми навчання за
спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна інженерія» / Укладач:
В.П. Ясній. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя, 2018. – 32 с.

УДК 620.10(07)

Методичні вказівки складені з врахуванням методичних розробок інших
вищих закладів освіти, а також матеріалів літературних джерел, перелічених в
списку.

© Ясній В.П., 2018
© Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя, 2018

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Вимоги до виконання та оформлення роботи	5
Розрахунково-графічна робота № 1	6
РОЗТЯГ-СТИСК СТУПІНЧАСТОГО БРУСА	6
Розрахунково-графічна робота №2	11
СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНА СТЕРЖНЕВА СИСТЕМА	11
Розрахунково-графічна робота № 3	17
ПРОЕКТНИЙ РОЗРАХУНОК НА ЗРІЗ ТА ЗМІНАННЯ	17
Розрахунково-графічна робота № 4	20
ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН	20
Розрахунково-графічна робота № 5	25
РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГИНІ ДВООПОРНОЇ БАЛКИ	25

ВСТУП

Дисципліна “Опір матеріалів” – наука про міцність, жорсткість та стійкість елементів конструкцій.

Найбільші труднощі при вивченні курсу студентами пов’язані з розв’язуванням задач. Водночас практична частина найбільшою мірою сприяє ефективному засвоєнню матеріалів, а також розвитку мислення, набуванню навичок розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість.

Методичні вказівки містять завдання до виконання семестрових розрахунково-графічних робіт, розроблені відповідно до вимог програми курсу і охоплюють його основні розділи. Вони розроблені з метою ефективного використання кредитно трансферно-накопичувальної системи у навчальному процесі шляхом організації самостійної роботи студентів для формування у них ґрунтовних знань, умінь і навичок при вивченні курсу “Опір матеріалів”.

ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ РОБОТИ

Індивідуальна розрахунково-графічна робота (РГР) виконується згідно варіантів.

Також при виконанні розрахунково-графічної роботи необхідно дотримуватися таких вимог:

1. РГР виконується на окремих листках формату А4.
2. На першій сторінці вказати назву університету, факультету, номер групи, назву предмету, прізвище та ініціали.
3. Слід подати умову задачі з числовими даними, зобразити схему конструктивного елемента (олівцем) і вказати на ній всі вихідні дані.
4. Розрахунок слід супроводжувати необхідними короткими поясненнями, рисунками, епюрами.
5. Розміщувати епюри зусиль на одному аркуші з розрахунковою схемою. На епюрах вказувати числові значення.

Якщо індивідуальна розрахунково-графічна робота не відповідає цим вимогам, то вона не зараховується.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 1

РОЗТЯГ-СТИСК СТУПІНЧАСТОГО БРУСА

Завдання для виконання

Для ступінчастого стержня ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) зображеного на рис.1.1, необхідно визначити:

- а) осьові зусилля на його довжині та побудувати епюру поздовжніх сил;
- б) нормальні напруження у поперечних перерізах і побудувати епюру нормальних напружень;
- в) нормальне і дотичне напруження у небезпечному перерізі на площадці розташованій під кутом α .
- г) повне переміщення вільного кінця стержня.

Дані для розрахунку вибрати з таблиці 1.

Таблиця 1

Варіант	№ схеми	P , кН	$A_1 \cdot 10^{-3}$, м ²	$A_2 \cdot 10^{-3}$, м ²	$A_3 \cdot 10^{-3}$, м ²	a , м	b , м	c , м	α , °
1	1	5	1.0	1.2	1.0	0.20	0.15	0.25	10
2	2	5.5	1.1	1.3	1.5	0.25	0.20	0.30	15
3	3	6	1.2	1.4	1.6	0.30	0.25	0.35	20
4	4	7	1.3	1.5	1.7	0.35	0.30	0.40	25
5	5	10	1.4	1.6	1.8	0.40	0.35	0.45	30
6	6	4	1.5	1.7	1.9	0.45	0.40	0.50	35
7	7	20	1.6	1.8	2.0	0.50	0.45	0.55	40
8	8	17	1.7	1.9	2.1	0.55	0.50	0.60	45
9	9	8	1.8	2.0	2.2	0.60	0.55	0.65	50
10	10	4	1.9	2.1	2.3	0.65	0.60	0.70	55
11	11	4.5	2.0	2.2	2.4	0.70	0.65	0.75	60
12	12	3	2.1	2.3	2.5	0.20	0.15	0.25	65
13	13	3.5	2.2	2.4	2.6	0.25	0.20	0.30	70
14	14	2	2.3	2.5	2.7	0.30	0.25	0.35	75
15	15	9	2.4	2.6	2.8	0.35	0.30	0.40	80
16	16	11	2.5	2.7	2.9	0.40	0.35	0.45	85
17	1	6	1.5	1.7	1.9	0.45	0.40	0.50	10
18	2	7	1.6	1.8	2.0	0.50	0.45	0.55	15
19	3	5	1.7	1.9	2.1	0.55	0.50	0.60	20
20	4	7	1.8	2.0	2.2	0.60	0.55	0.65	25
21	5	10	1.9	2.1	2.3	0.65	0.60	0.70	30
22	6	4	2.1	2.3	2.5	0.70	0.65	0.75	35
23	7	8	2.2	2.4	2.6	0.20	0.15	0.25	40
24	8	9	1.1	1.3	1.5	0.25	0.20	0.30	45
25	9	5	1.2	1.4	1.6	0.30	0.25	0.35	50
26	10	15	1.6	1.8	2.0	0.35	0.30	0.40	55

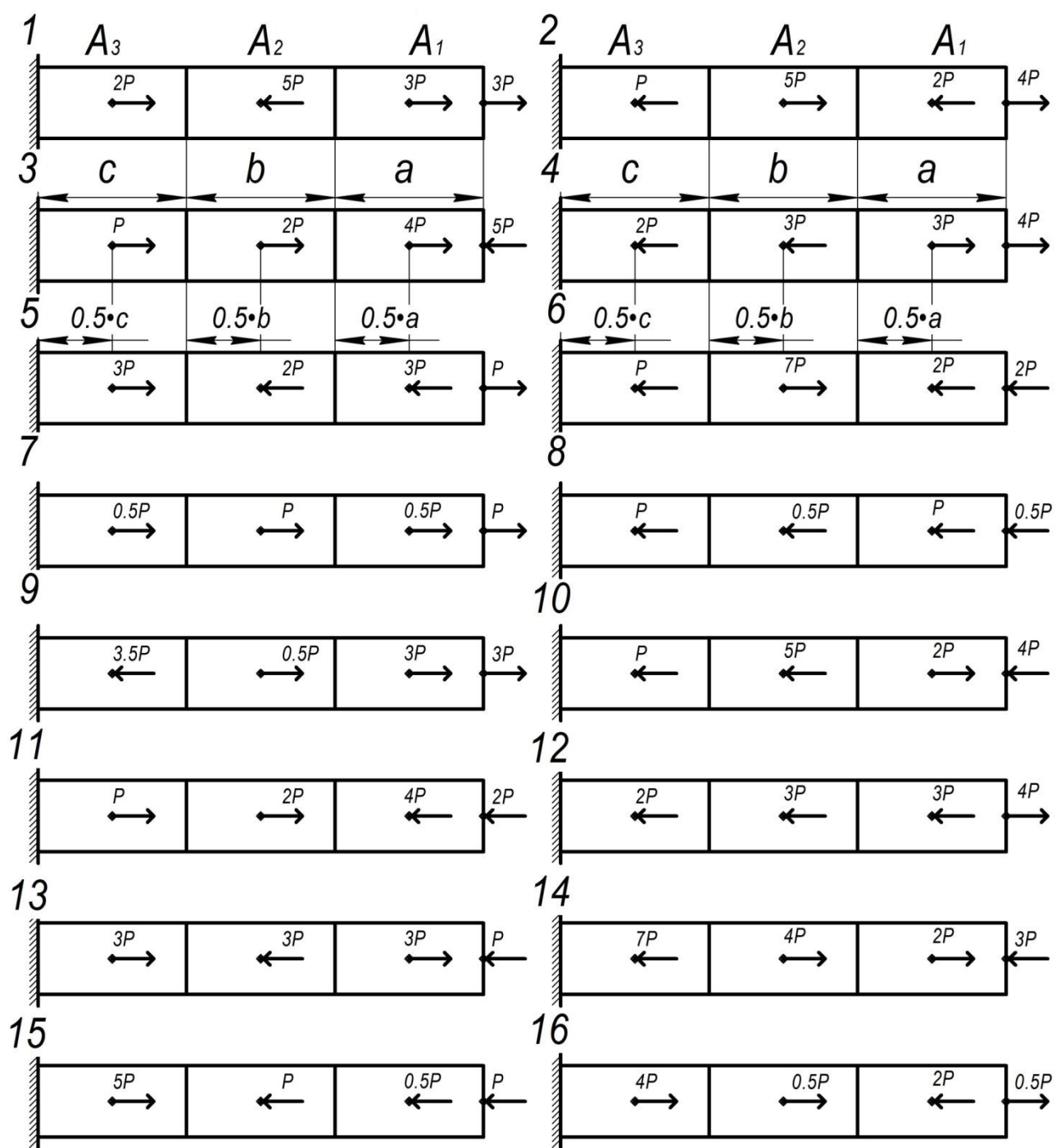


Рис. 1.1. Ступінчастий брус

Приклад розв'язання

а) Осьові зусилля на його довжині та побудувати епюру поздовжніх сил.

Для побудови епюри поздовжніх сил (N) поділяємо стержень на VI ділянок (рис. 1.2а). Для визначення N достатньо було б 4 ділянки, але для визначень напружень потрібно 6. Користуючись методом перерізів, визначаємо значення N на цих ділянках (знак “-” вказує, що поздовжня сила N спричиняє стиск на відповідній ділянці):

$$\begin{aligned} N_I &= 10 \text{ кН} && \text{— ділянка I;} \\ N_{II} &= 10 \text{ кН} + 5 \text{ кН} = 15 \text{ кН} && \text{— ділянка II;} \\ N_{III} &= 10 \text{ кН} + 5 \text{ кН} = 15 \text{ кН} && \text{— ділянка III;} \\ N_{IV} &= 10 \text{ кН} + 5 \text{ кН} - 20 \text{ кН} = -5 \text{ кН} && \text{— ділянка IV} \\ N_V &= 10 \text{ кН} + 5 \text{ кН} - 20 \text{ кН} = -5 \text{ кН} && \text{— ділянка V;} \\ N_{VI} &= 10 \text{ кН} + 5 \text{ кН} - 20 \text{ кН} + 20 \text{ кН} = 15 \text{ кН} && \text{— ділянка VI.} \end{aligned}$$

За отриманими значеннями будуюмо епюру поздовжніх сил (рис. 1.2б).

б) Нормальні напруження у поперечних перерізах і побудувати епюру нормальних напружень.

Для того, щоб визначити нормальні напруження (знак “-” вказує, що нормальне напруження є стискаюче на відповідній ділянці) на окремих ділянках, потрібно значення поздовжніх сил на цих відрізках поділити на площі відповідних поперечних перерізів ($A_1=4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $A_2=2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $A_3=5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$):

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \frac{N_I}{A_1} = \frac{10 \text{ кН}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = \frac{10\,000 \text{ Н}}{400 \text{ мм}^2} = 25 \text{ МПа} && \text{— ділянка I;} \\ \sigma_{II} &= \frac{N_{II}}{A_1} = \frac{15 \text{ кН}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = \frac{15\,000 \text{ Н}}{400 \text{ мм}^2} = 37,5 \text{ МПа} && \text{— ділянка II;} \\ \sigma_{III} &= \frac{N_{III}}{A_2} = \frac{15 \text{ кН}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = \frac{15\,000 \text{ Н}}{200 \text{ мм}^2} = 75 \text{ МПа} && \text{— ділянка III;} \\ \sigma_{IV} &= \frac{N_{IV}}{A_2} = \frac{-5 \text{ кН}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = \frac{-5\,000 \text{ Н}}{200 \text{ мм}^2} = -25 \text{ МПа} && \text{— ділянка IV;} \\ \sigma_V &= \frac{N_V}{A_3} = \frac{-5 \text{ кН}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = \frac{-5\,000 \text{ Н}}{500 \text{ мм}^2} = -10 \text{ МПа} && \text{— ділянка V;} \\ \sigma_{VI} &= \frac{N_{VI}}{A_3} = \frac{15 \text{ кН}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = \frac{15\,000 \text{ Н}}{500 \text{ мм}^2} = 30 \text{ МПа} && \text{— ділянка VI;} \end{aligned}$$

За отриманими значеннями будуюмо епюру нормальних напружень (рис. 1.2в).

в) нормальне і дотичне напруження у небезпечному перерізі на площадці розташованій під кутом α° .

Визначаємо нормальні та дотичні напруження (рис. 1.3) на ділянці небезпечного перерізу під кутом $\alpha=60^\circ$:

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\max} \cos^2 \alpha = 75 \text{ МПа} \cdot \cos^2 60^\circ = 75 \text{ МПа} \cdot 0,25 = 18,75 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{2} \sin 2\alpha = \frac{75 \text{ МПа}}{2} \cdot \sin 2(60^\circ) = 37,5 \text{ МПа} \cdot 0,87 = 32,63 \text{ МПа};$$

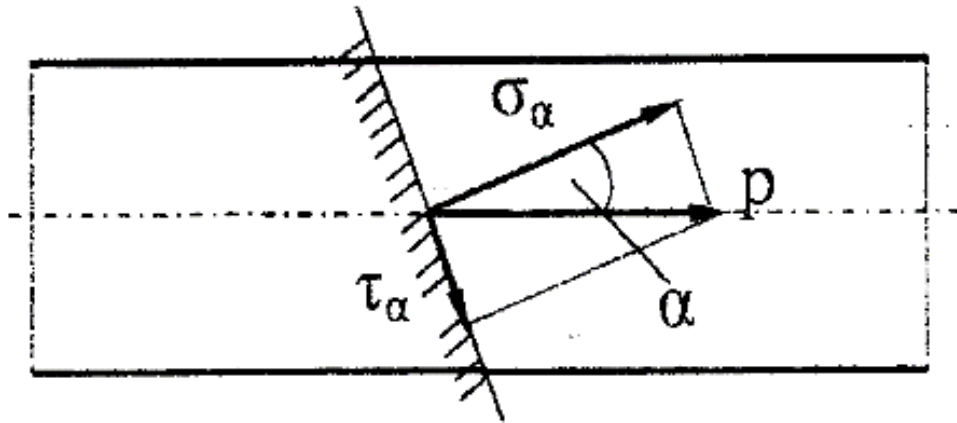


Рис. 1.3. Напруження в похилих перерізах

г) Повне переміщення вільного кінця стержня ($l_1=0,6$ м; $l_2=0,7$ м; $l_3=0,5$ м; $l_4=0,7$ м; $l_5=0,8$ м; $l_6=0,5$ м;).

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 + \Delta l_5 + \Delta l_6$$

$$\Delta l_1 = \sigma_I \frac{l_1}{E} = 25 \text{ МПа} \cdot \frac{0,6 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,075 \text{ мм} \quad \text{— ділянка I;}$$

$$\Delta l_2 = \sigma_{II} \frac{l_2}{E} = 37,5 \text{ МПа} \cdot \frac{0,7 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 0,131 \text{ мм} \quad \text{— ділянка II;}$$

$$\Delta l_3 = \sigma_{III} \frac{l_3}{E} = 75 \text{ МПа} \cdot \frac{0,5 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 0,188 \text{ мм} \quad \text{— ділянка III;}$$

$$\Delta l_4 = \sigma_{IV} \frac{l_4}{E} = -25 \text{ МПа} \cdot \frac{0,7 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = -0,088 \text{ мм} \quad \text{— ділянка IV;}$$

$$\Delta l_5 = \sigma_V \frac{l_5}{E} = -10 \text{ МПа} \cdot \frac{0,8 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = -0,04 \text{ мм} \quad \text{— ділянка V;}$$

$$\Delta l_6 = \sigma_{VI} \frac{l_6}{E} = 30 \text{ МПа} \cdot \frac{0,5 \text{ м}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 0,075 \text{ мм} \quad \text{— ділянка VI;}$$

$$\Delta l = 0,075 + 0,131 + 0,188 - 0,088 - 0,04 + 0,075 = 0,341 \text{ мм}$$

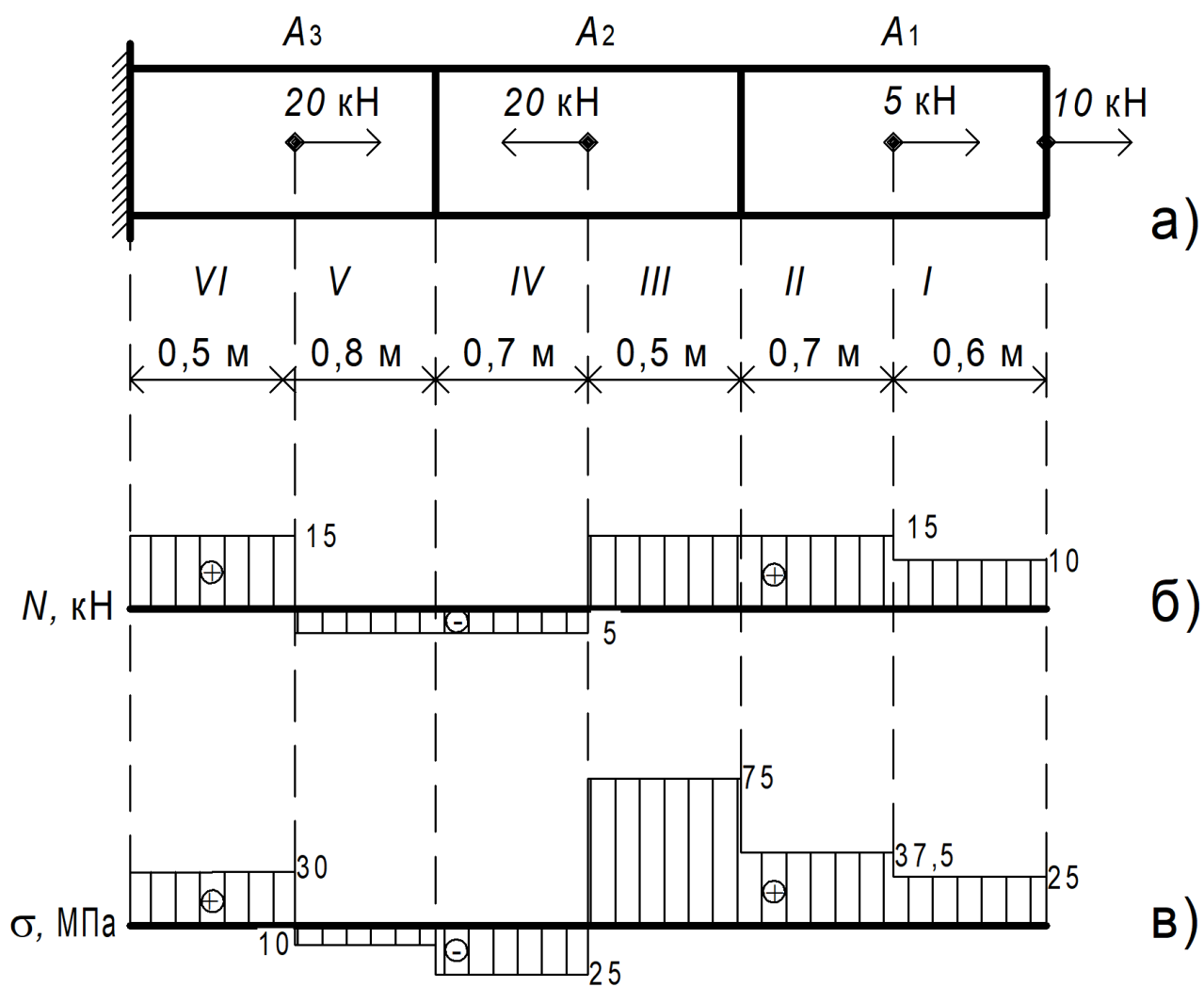


Рис. 1.2. Стержень з ділянками – а); епюра поздовжніх сил – б);
та епюра нормальних напружень –в)

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 2

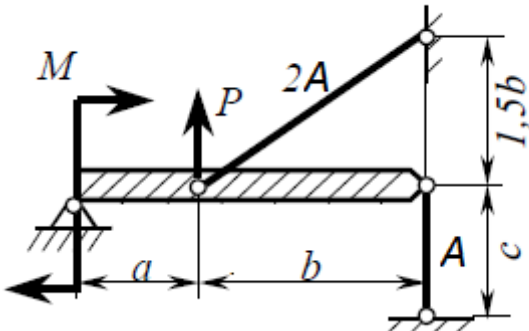
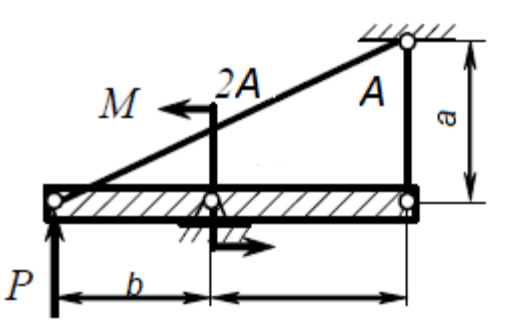
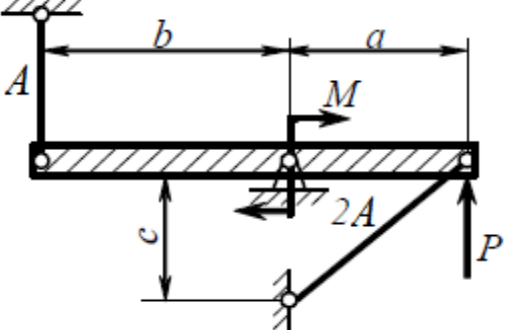
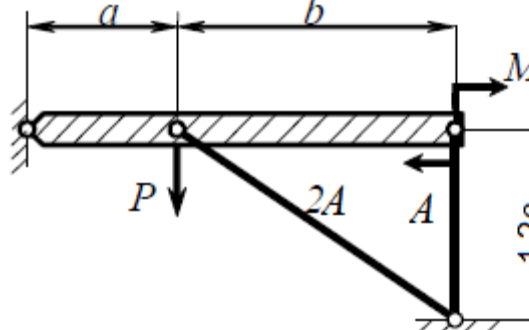
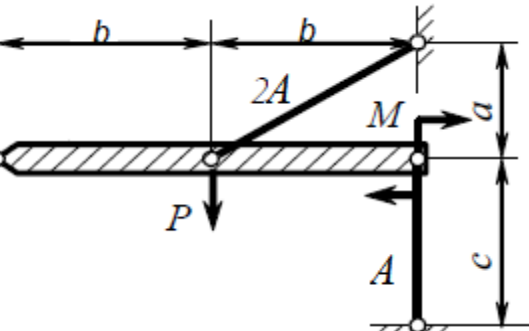
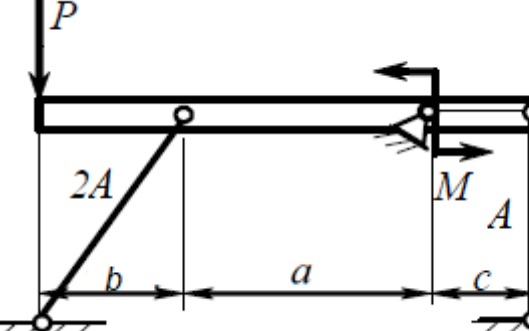
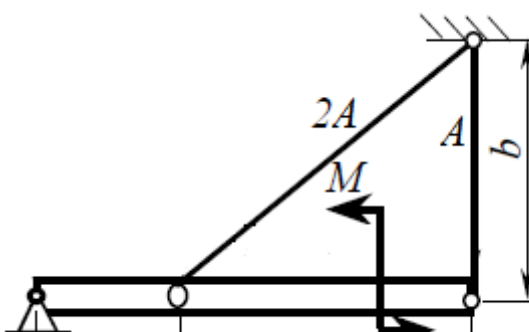
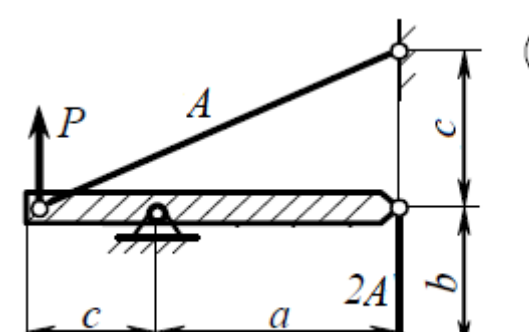
СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНА СТЕРЖНЕВА СИСТЕМА

Визначити діаметр поперечного перерізу сталених стержнів, зображених на рис. 2.1, якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа.

Дані для розрахунку вибрати з таблиці 2.

Таблиця 2

Варіант	№ схеми	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	a , м	b , м	c , м
1	13	80	400	350	0.6	1.0	0.5
2	12	100	380	300	0.7	1.1	0.6
3	11	120	360	250	0.8	1.2	0.7
4	10	140	340	200	0.5	0.9	0.4
5	9	160	320	150	1.0	0.6	0.5
6	8	180	300	400	1.1	0.7	0.6
7	7	200	280	450	1.2	0.8	0.7
8	6	220	260	400	0.9	0.5	0.4
9	5	240	300	450	0.5	1.0	0.6
10	4	260	320	400	0.6	1.1	0.7
11	3	280	200	300	0.7	1.2	0.8
12	2	300	180	400	0.4	0.9	0.5
13	1	320	160	450	1.0	0.6	0.5
14	1	340	140	300	1.1	0.7	0.6
15	2	360	120	300	1.2	0.8	0.7
16	3	380	100	250	0.9	0.5	0.4
17	4	400	80	250	0.4	0.5	0.9
18	5	90	250	300	0.7	0.8	1.2
19	6	110	300	400	0.6	0.7	1.1
20	7	130	300	250	0.5	0.6	1.0
21	8	150	250	450	0.4	0.5	0.9
22	9	170	300	150	0.9	0.7	1.2
23	10	190	350	100	1.0	0.9	1.1
24	11	210	400	300	0.7	1.0	0.5
25	12	230	350	100	0.5	1.1	0.7
26	13	250	400	300	0.6	1.0	0.8

1	2
 <p>①</p>	 <p>②</p>
 <p>③</p>	 <p>④</p>
 <p>⑤</p>	 <p>⑥</p>
 <p>⑦</p>	 <p>⑧</p>

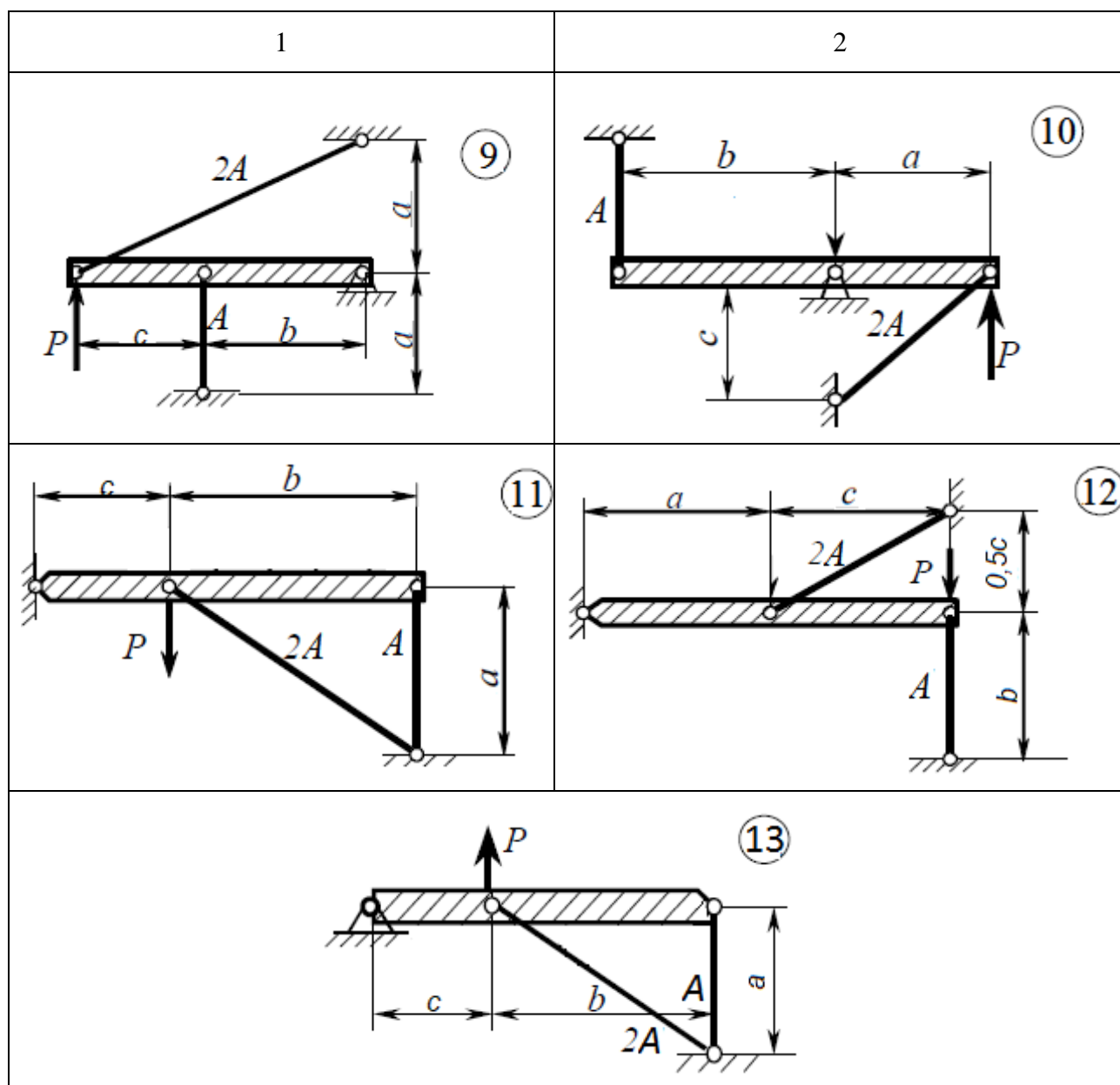


Рис. 2.1. Стержневая система

Приклад розв'язання

Для стержневої системи (рис. 2.2) визначити діаметри поперечних перерізів сталених стержнів, якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа.

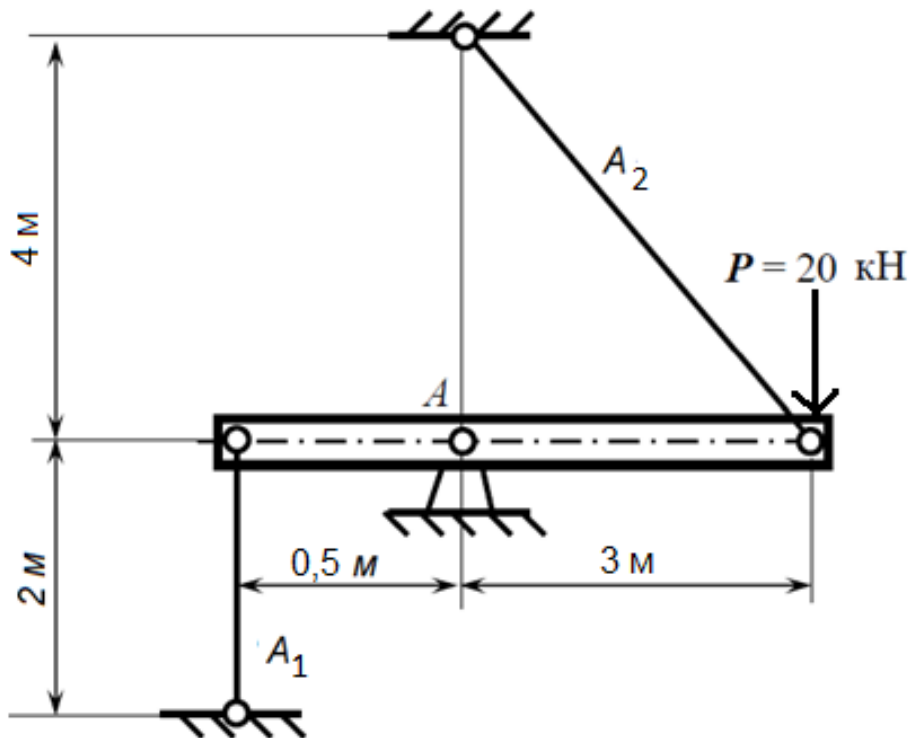


Рис. 2.2. Статично невизначувана стержнева система

Статичний аспект задачі. Відкидаємо опори, заміняємо їх вплив реакціями (рис. 2.3) та складаємо рівняння статички (можна скласти три, але у двох з них будуть реакції X_A або Y_A , які нам не потрібні).

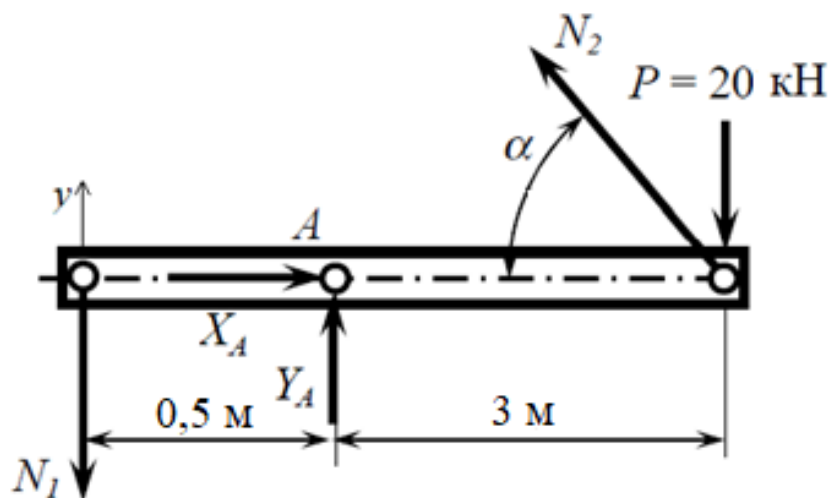


Рис. 2.3. Статично невизначувана стержнева система з реакціями замість зв'язків

Тому доцільно скласти таке рівняння, в якому будуть тільки зусилля N_1 та N_2 . Таким буде рівняння моментів відносно точки A .

$$\sum M_A = 0; \text{ (додатній момент вважаємо } \odot \text{)}$$

$$N_1 \cdot 0,5 + N_2 \cdot \sin \alpha \cdot 3 - P \cdot 3 = 0;$$

$$\text{де } \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8$$

$$N_1 + 4,8 N_2 = 120; \quad (2.1)$$

Геометричний аспект задачі. Зображаємо стержневу систему в деформованому стані. (рис. 2.4). Балка BC абсолютно жорстка, вона не деформується, а повертається навколо нерухомої точки A . Показуємо видовження стержнів.

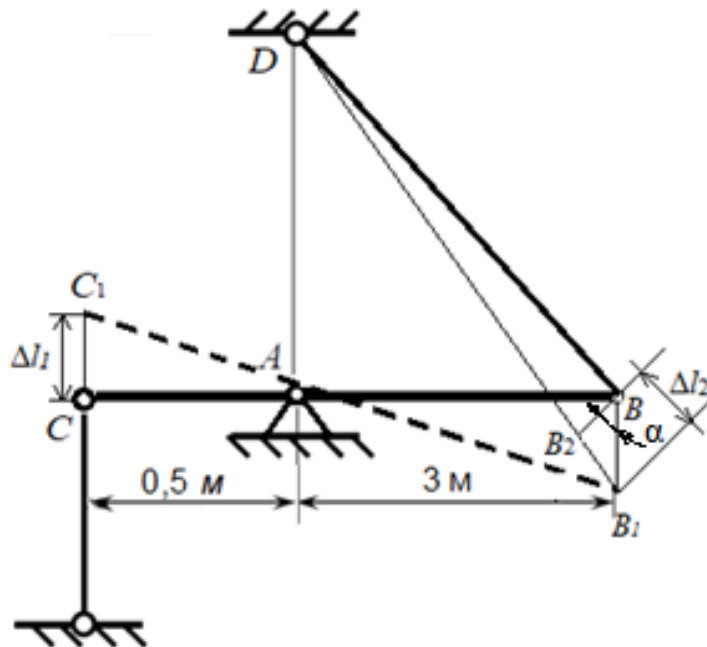


Рис. 2..4 Стержнева система в деформованому стані

Подовження першого стержня Δl_1 є відрізок CC_1 , подовження другого стержня Δl_2 є відрізок B_1B_2 . Точка B_2 знаходиться на перетині прямої DB_2 і перпендикуляра до DB_2 . Встановлюємо зв'язок між Δl_1 і Δl_2 . Трикутники ACC_1 та ABB_1 подібні, отже

$$\frac{CC_1}{AC} = \frac{BB_1}{AB}; \quad CC_1 = \Delta l_1; \quad BB_1 = \frac{B_1B_2}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha};$$

$$\frac{\Delta l_1}{0,5} = \frac{\Delta l_2}{3 \cdot \sin \alpha}; \quad 2 \cdot \Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{3 \cdot 0,8};$$

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{4,8}; \quad (2.2)$$

Фізичний аспект задачі. За допомогою закону Гука ($\Delta l = \frac{NL}{EA}$) деформації виражаємо через зусилля.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{EA_1} = \frac{N_1 \cdot 2}{E \cdot 2A}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} = \frac{N_2 \cdot 4}{E \cdot A}; \quad (2.3)$$

$$\text{де } l_2 = BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ м}$$

При записі закону Гука необхідно брати знак “плюс”, якщо напрямок деформації співпадає з напрямком зусилля, і “мінус” – якщо не співпадає.

Тепер сумісно розв’язуємо рівняння, які одержані з розгляду трьох аспектів задачі. Δl_1 і Δl_2 із (2.3) підставляємо у вираз (2.2)

$$\frac{N_1 \cdot 2}{E \cdot 2A} = \frac{N_2 \cdot 4 \cdot 4,8}{E \cdot A}; \quad N_1 = \frac{N_2 \cdot 4 \cdot 4,8 \cdot E \cdot 2A}{2 \cdot E \cdot A};$$

звідки

$$N_1 = 19,2 N_2. \quad (2.4)$$

Підставляємо отриману залежність (2.4) у рівняння (2.1)

$$19,2 N_2 + 4,8 N_2 = 120;$$

$$N_2 = 5 \text{ кН.}$$

Підставляємо зусилля N_2 у залежність (2.4)

$$N_1 = 19,2 \cdot 5 = 96 \text{ кН.}$$

Тепер за допомогою формули $\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma]$, визначаємо площі поперечних перерізів стержнів.

$$\text{У першому стержні: } A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{96 \cdot 10^3 \text{ Н}}{160 \text{ МПа}} = 600 \text{ мм}^2.$$

$$\text{У другому стержні: } A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ Н}}{160 \text{ МПа}} = 31,25 \text{ мм}^2.$$

Відповідно діаметри першого та другого стержнів будуть дорівнювати:

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 600 \text{ мм}^2}{\pi}} = 27,65 \text{ мм}, \quad d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 31,25 \text{ мм}^2}{\pi}} = 6,31 \text{ мм.}$$

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 3

ПРОЕКТНИЙ РОЗРАХУНОК НА ЗРІЗ ТА ЗМИНАННЯ

а) Провести проектний розрахунок заклепкового з'єднання, визначивши діаметр заклепок з умов міцності на зріз та зминання (рис. 3), якщо $[\sigma_p]=160$ МПа, $[\tau_{зр}]=100$ МПа, $[\sigma_{зм}]=160$ МПа.

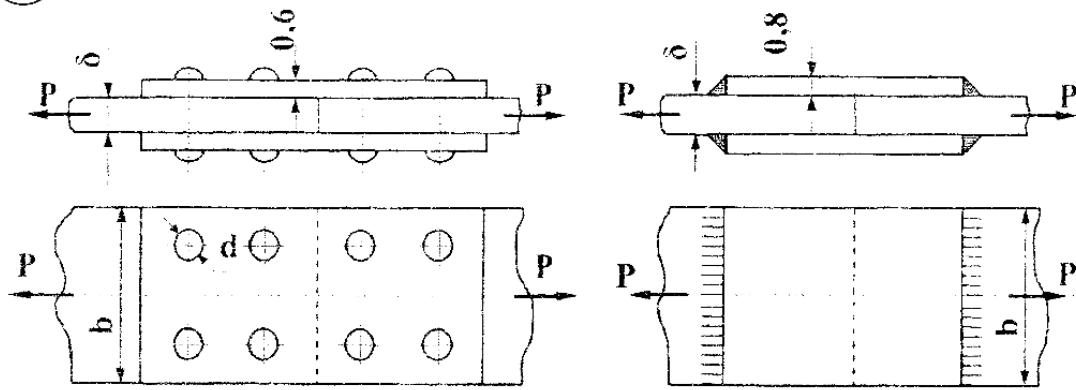
б) Провести проектний розрахунок заклепкового з'єднання, визначивши діаметр заклепок з умов міцності на зріз та зминання (рис. 3), якщо $[\sigma_p]=160$ МПа, $[\tau_{зр}]=100$ МПа, $[\sigma_{зм}]=160$ МПа.

Дані для розрахунку вибрати з таблиці 3, враховуючи, що $a = 2\delta$

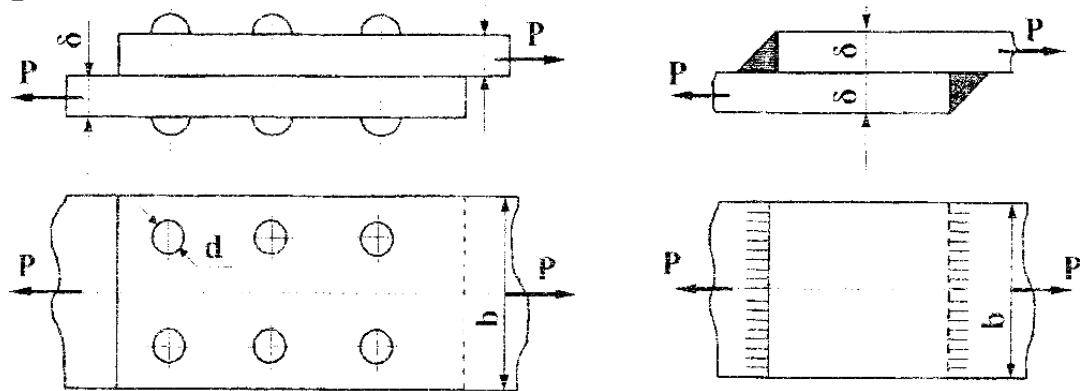
Таблиця 3

Варіант	Схема	P , кН	$b \cdot \delta$, мм	№ швелера
1.	1	50	200·8	-
2.	1	45	180·8	-
3.	1	35	240·10	-
4.	1	55	220·12	-
5.	1	65	260·12	-
6.	1	62	250·12	-
7.	1	70	280·10	-
8.	1	75	300·10	-
9.	2	45	180·8	-
10.	2	50	210·8	-
11.	2	52	230·10	-
12.	2	60	240·10	-
13.	2	62	250·12	-
14.	2	70	280·12	-
15.	2	75	300·12	-
16.	2	82	330·12	-
17.	3	100	-	14
18.	3	105	-	16
19.	3	110	-	18
20.	3	115	-	18a
21.	3	120	-	20
22.	3	125	-	22
23.	3	125	-	22a
24.	3	150	-	24
25.	1	55	180·8	-
26.	1	70	200·8	-

①



②



③

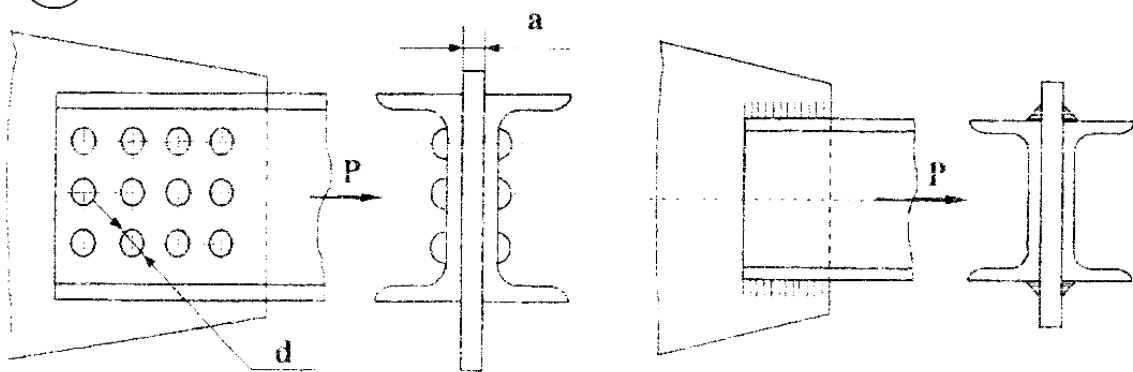


Рис. 3. Заклепкові з'єднання

Приклад розв'язання

Перевірити міцність заклепкового з'єднання (рис.3, схема 1), визначивши діаметр заклепок з умов міцності на зріз та зминання, якщо $[\sigma_p]=160$ МПа, $[\tau_{зр}]=100$ МПа, $[\sigma_{зм}]=160$ МПа $P = 45$ кН, $b \cdot \delta = 200 \cdot 8$ мм, $d = 20$ мм.

Обчислюємо напруження у листах по ослабленому перерізу. Попередньо обчислюємо площу нетто (A_n) перерізу:

$$A_n = b \cdot \delta - d \cdot n_1 \cdot \delta = 200 \cdot 8 - 20 \cdot 2 \cdot 8 = 1280 \text{ мм}^2,$$

де n_1 - число заклепок в ослабленому перерізу.

$$\text{Тоді } \sigma_p = \frac{P}{A_n} = \frac{45 \cdot 10^3 \text{ Н}}{1280 \text{ мм}^2} \approx 35,16 \text{ МПа} < [\sigma_p].$$

Перевіряємо міцність заклепок на зріз, враховуючи, що заклепки двозрізні ($i=2$):

$$\tau_{зр} = \frac{P}{A_{зр}} = \frac{4 \cdot P}{i n \pi d^2} = \frac{4 \cdot 45 \cdot 10^3 \text{ Н}}{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (20^2 \text{ мм}^2)} \approx 17,90 \text{ МПа} < [\tau_{зр}],$$

тут n – число заклепок з одного боку.

Перевіряємо міцність заклепкового з'єднання на зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{n d \delta_{\min}} = \frac{45 \cdot 10^3 \text{ Н}}{4 \cdot 20 \text{ мм} \cdot 8 \text{ мм} \cdot 0,6} \approx 117,19 \text{ МПа} < [\sigma_{зм}].$$

Отже міцність з'єднання забезпечена.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 4

ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Навколо деякої точки виділено елемент (рис. 4). Потрібно:

- а) визначити головні напруження (аналітичним та графічним методами);
- б) знайти положення головних площадок та показати лінії дії головних напружень;
- в) визначити максимальні дотичні напруження (аналітичним та графічним методами) і положення площадок на яких вони діють;
- г) обчислити головні (відносні) деформації та відносну зміну об'єму.

Модуль пружності для матеріалу $E=2 \cdot 10^5$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\mu=0,3$.

Дані для розрахунку вибрати з таблиці 4.

Таблиця 4

Варіант	Схема	σ_x , МПа	σ_y , МПа	τ_{xy} , МПа
1.	8	50	10	25
2.	7	55	15	30
3.	6	60	20	35
4.	5	65	25	40
5.	4	70	30	30
6.	3	75	25	50
7.	2	80	20	40
8.	1	85	15	45
9.	8	10	55	25
10.	7	15	50	20
11.	6	20	45	35
12.	5	25	40	30
13.	4	30	35	15
14.	3	35	30	20
15.	2	40	20	25
16.	1	50	15	40
17.	8	80	50	40
18.	7	85	55	50
19.	6	90	60	60
20.	5	95	65	65
21.	4	100	70	70
22.	3	105	75	75
23.	2	110	80	85
24.	1	115	85	80
25.	1	26	26	30
26.	2	44	16	26

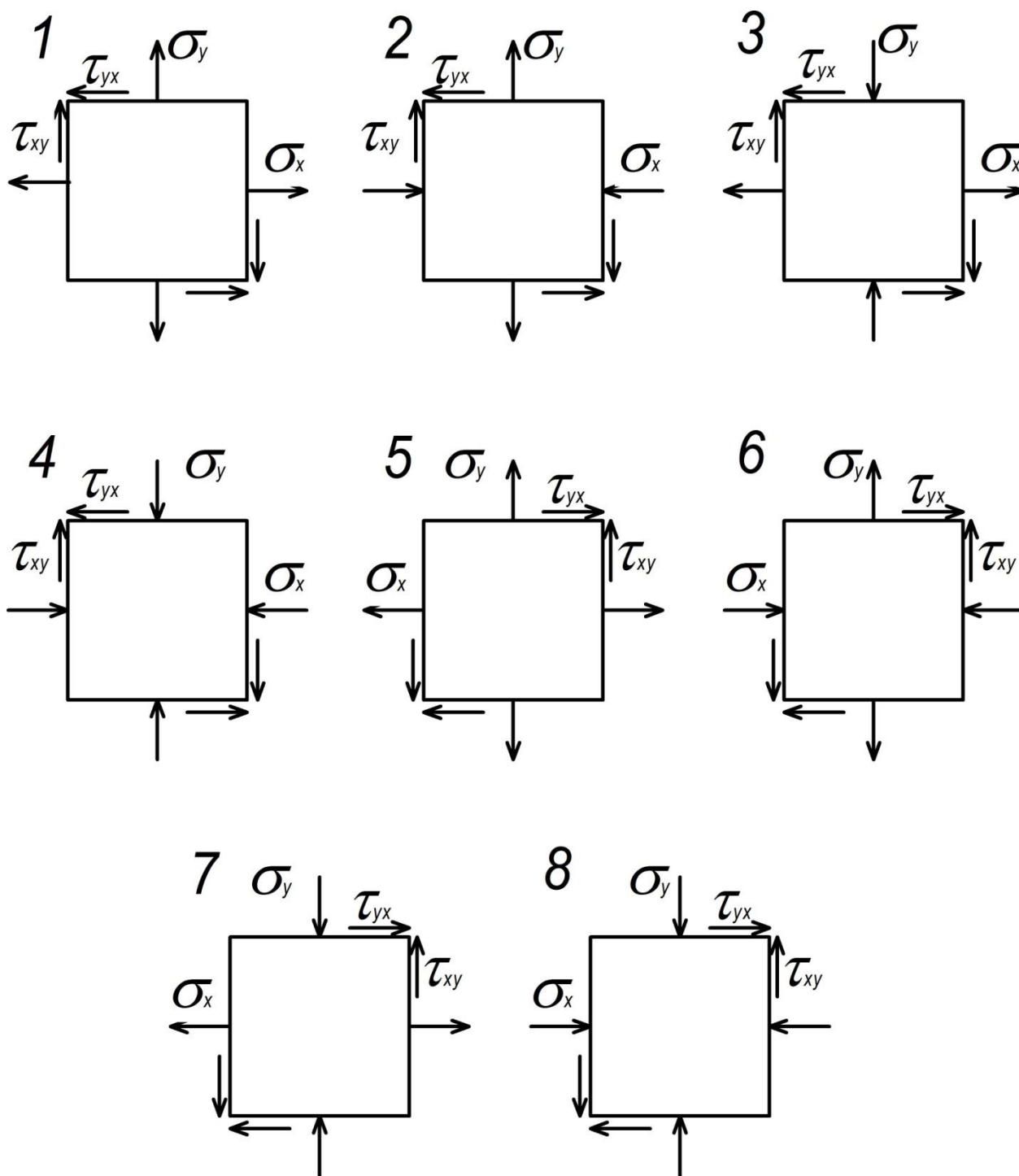


Рис. 4.1. Елемент з нормальними та дотичними напруженнями

Приклад розв'язання

Навколо деякої точки виділено елемент (рис. 4.2). Модуль пружності для матеріалу $E=2 \cdot 10^5$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\mu=0,3$.

а) визначити головні напруження (аналітичним та графічним методами);

Якщо позначимо так, як зображено на рис. 4.2, то

$$\sigma_\alpha = 100 \text{ МПа}; \sigma_\beta = -60 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = -40 \text{ МПа}; \tau_\beta = 40 \text{ МПа}.$$

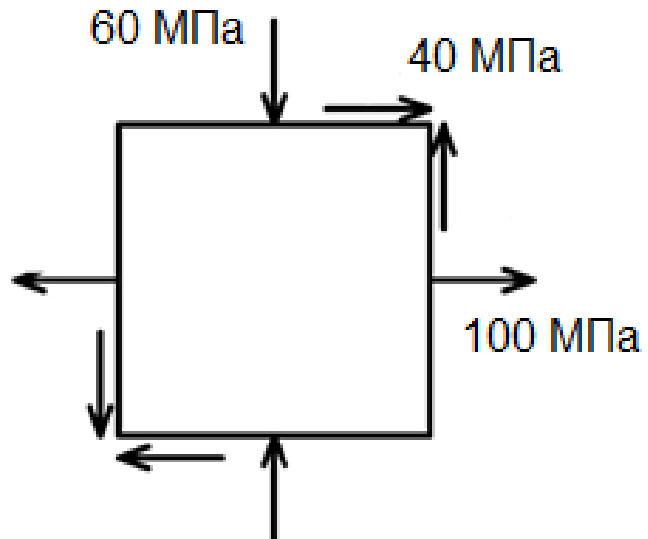


Рис. 4.2. Елемент з нормальними та дотичними напруженнями

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right] = \frac{1}{2} \left[100 - 60 + \sqrt{(100 + 60)^2 + 4 \cdot 40^2} \right] = \frac{1}{2} [40 + \sqrt{25600 + 6400}] \approx 110 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right] = \frac{1}{2} \left[100 - 60 - \sqrt{(100 + 60)^2 + 4 \cdot 40^2} \right] = \frac{1}{2} [40 - 179] \approx -70 \text{ МПа},$$

б) знайти положення головних площадок та показати лінії дії головних напружень;

Знайдемо кут за формулою

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{-\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta} = \frac{-(-40)}{110 - (-60)} = 0,235$$

що відповідає $\sigma_\alpha \approx 13^\circ$.

Цей кут відкладаємо від горизонталі проти годинникової стрілки і знаходимо напрям і знаходимо напруження σ_1 ; напрям σ_3 перпендикулярний

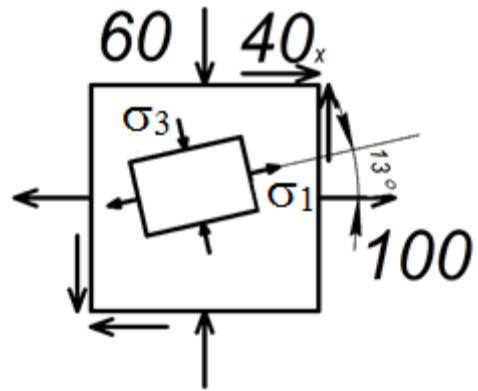


Рис. 4.3. Положення головних площадок в заданому елементі

в) визначити максимальні дотичні напруження (аналітичним та графічним методами) і положення площадок на яких вони діють;

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{110 + 70}{2} = 90 \text{ МПа}$$

г) обчислити головні (відносні) деформації та відносну зміну об'єму.

Головні (відносні) деформації обчислюємо за формулою

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \mu \sigma_3) = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} \cdot (110 \text{ МПа} - 0,3 \cdot (-70 \text{ МПа})) = \frac{131 \text{ МПа}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 0,000655$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) = -\frac{0,3}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} \cdot (110 \text{ МПа} + (-70 \text{ МПа})) = -\frac{12 \text{ МПа}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = -0,00006$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_3 - \mu \sigma_1) = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} \cdot ((-70 \text{ МПа}) - 0,3 \cdot 110 \text{ МПа}) = -\frac{103 \text{ МПа}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} \\ &= -0,000515 \end{aligned}$$

Тоді відносна зміна об'єму буде дорівнювати

$$\begin{aligned} E_V &= \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1 - 2 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} \cdot (110 \text{ МПа} + 0 + (-70 \text{ МПа})) = \frac{0,4 \cdot 40 \text{ МПа}}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} \\ &= 0,00008 \end{aligned}$$

Визначення головних напружень та площадок за допомогою круга Мора (графічний метод)

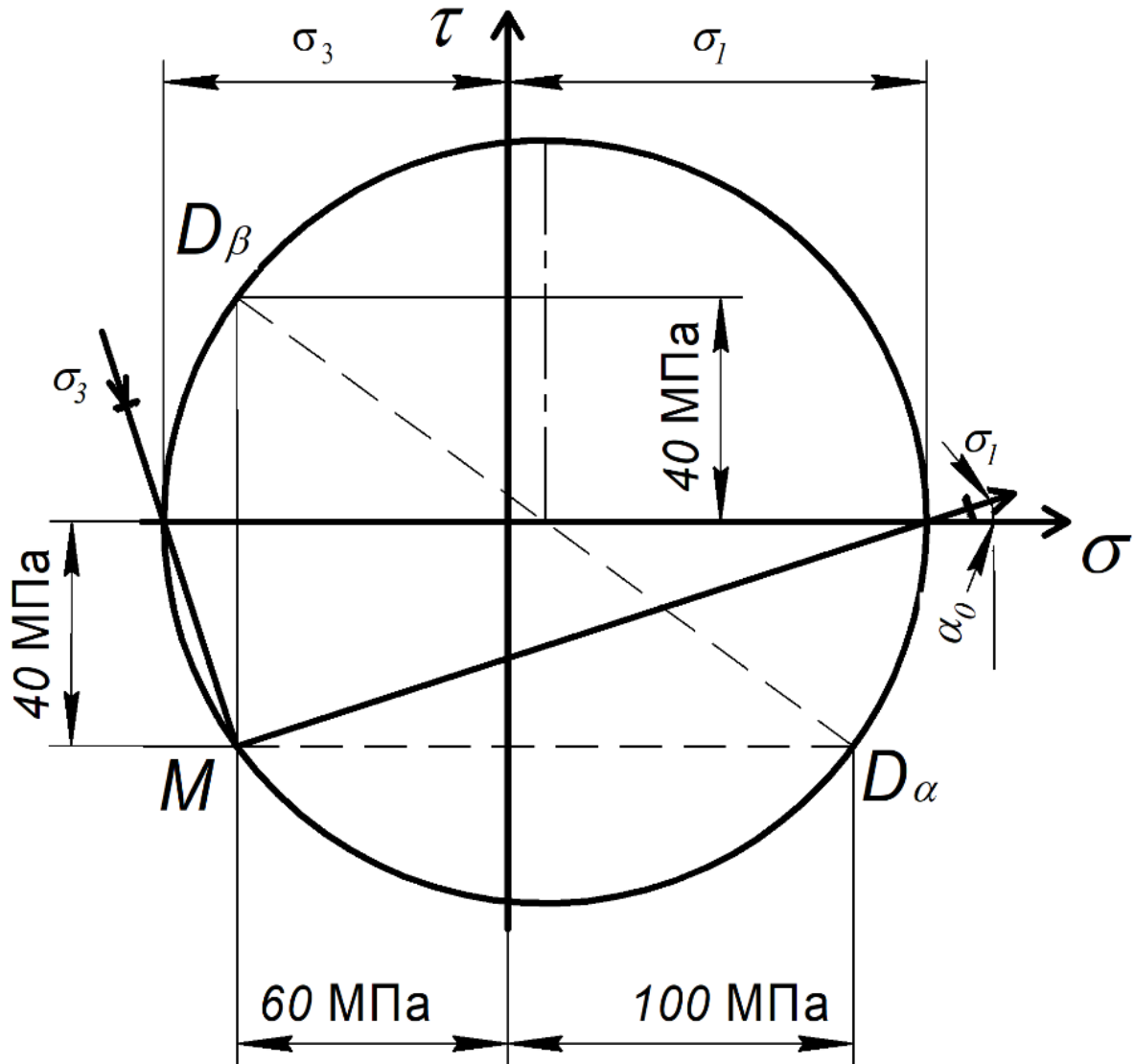


Рис. 4.4. Графічний метод визначення головних напружень та площадок

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 5

РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГІНІ ДВООПОРНОЇ БАЛКИ

Для заданої балки (рис. 5.1) необхідно:

а) побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів;

б) із розрахунків на міцність підібрати двотавровий, круглий і прямокутний перерізи, прийнявши $b/h = 0.5$;

в) порівняти масу одного довжини кожного профілю, якщо матеріал балки – сталь, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma_{зг}] = 160$ МПа.

Дані вибрати з таблиці 5.

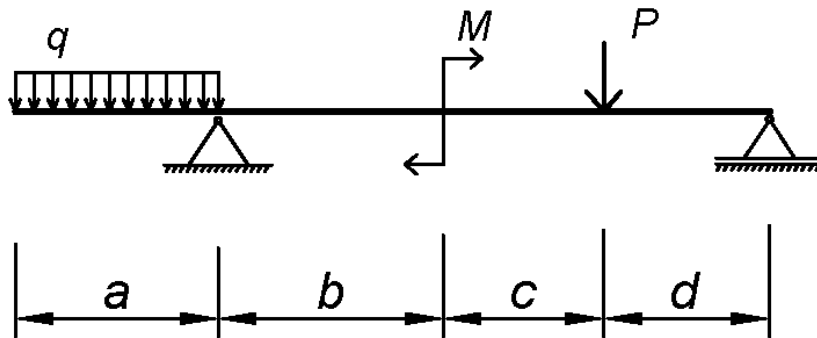
Таблиця 5

Варіант	Схема	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	a , м	b , м	c , м	d , м
1	1	7	12	3	0,5	0,9	0,4	0,8
2	2	8	13	4	0,8	0,6	0,7	0,5
3	3	7	14	5	0,6	0,9	0,4	0,5
4	4	9	15	6	0,7	0,4	0,9	0,8
5	5	10	16	7	0,6	0,8	0,5	0,9
6	6	11	17	8	0,7	0,5	0,6	0,5
7	7	12	18	9	0,9	0,8	0,7	0,6
8	8	11	19	10	0,9	0,7	0,7	0,8
9	9	10	20	9	0,7	1,0	0,4	0,8
10	10	9	21	8	1,0	0,5	0,9	0,6
11	11	8	20	7	0,6	0,3	0,4	0,4
12	12	7	19	6	1,0	0,5	0,6	0,1
13	13	8	18	5	0,6	0,4	0,9	0,5
14	14	9	17	4	0,7	0,9	0,5	0,6
15	1	10	16	3	0,8	0,5	0,8	0,6
16	2	11	15	5	0,5	0,8	0,4	0,5
17	3	20	25	25	1	0,9	0,8	0,7
18	4	25	30	20	0,7	0,8	0,9	1
19	5	30	25	15	0,7	1	0,8	0,9
20	6	21	14	24	0,9	0,8	1	0,7
21	7	22	23	23	0,6	1,0	0,9	0,8
22	8	27	20	24	1	0,9	1,1	0,5
23	9	26	11	14	0,5	0,6	0,7	1,1
24	10	22	12	16	1,1	0,8	0,9	0,7
25	11	21	13	17	0,8	1,1	0,9	0,7
26	12	23	14	18	0,5	0,4	0,8	1,1

<p>1</p> <p>Diagram 1: A beam with a uniformly distributed load q over length a, a point load P at distance c from the start of q, and a point load M at distance d from the end of q. The beam is supported by a pin at distance b from the start of q and a roller at the end.</p>	<p>8</p> <p>Diagram 8: A beam with a point load P at the start, a point load M at distance b, a uniformly distributed load q over length c, and a point load at the end. The beam is supported by a pin at distance a from the start and a roller at the end.</p>
<p>2</p> <p>Diagram 2: A beam with a point load M at the start, a uniformly distributed load q over length b, a point load P at distance c from the start of q, and a point load at the end. The beam is supported by a pin at distance a from the start and a roller at the end.</p>	<p>9</p> <p>Diagram 9: A beam with a uniformly distributed load q over length a, a point load P at distance b from the start of q, and a point load M at distance c from the end of q. The beam is supported by a pin at the start and a roller at the end.</p>
<p>3</p> <p>Diagram 3: A beam with a point load P at the start, a uniformly distributed load q over length b, and a point load M at the end. The beam is supported by a pin at distance a from the start and a roller at distance c from the end of q.</p>	<p>10</p> <p>Diagram 10: A beam with a point load M at the start, a uniformly distributed load q over length c, and a point load P at the end. The beam is supported by a pin at the start and a roller at distance b from the end of q.</p>
<p>4</p> <p>Diagram 4: A beam with a point load M at the start, a uniformly distributed load q over length c, and a point load P at the end. The beam is supported by a pin at distance a from the start and a roller at distance b from the end of q.</p>	<p>11</p> <p>Diagram 11: A beam with a point load P at the start, a uniformly distributed load q over length b, and a point load M at the end. The beam is supported by a pin at distance a from the start and a roller at the end.</p>
<p>5</p> <p>Diagram 5: A beam with a point load M at the start, a uniformly distributed load q over length c, and a point load P at the end. The beam is supported by a pin at the start and a roller at distance b from the end of q.</p>	<p>12</p> <p>Diagram 12: A beam with a point load M at the start, a uniformly distributed load q over length c, and a point load P at the end. The beam is supported by a pin at the start and a roller at distance b from the end of q.</p>
<p>6</p> <p>Diagram 6: A beam with a uniformly distributed load q over length a, a point load P at distance b from the start of q, and a point load M at the end. The beam is supported by a pin at the start and a roller at distance c from the end of q.</p>	<p>13</p> <p>Diagram 13: A beam with a uniformly distributed load q over length a, a point load P at distance b from the start of q, and a point load M at the end. The beam is supported by a pin at the start and a roller at distance c from the end of q.</p>
<p>7</p> <p>Diagram 7: A beam with a uniformly distributed load q over length b, a point load P at distance a from the start of q, and a point load M at the end. The beam is supported by a pin at the start and a roller at distance c from the end of q.</p>	<p>14</p> <p>Diagram 14: A beam with a uniformly distributed load q over length a, a point load P at distance b from the start of q, and a point load M at the end. The beam is supported by a pin at distance c from the start of q and a roller at the end.</p>

Приклад розв'язання

Для заданої балки (рис. 5.2) необхідно:



$$M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; P = 30 \text{ кН};$$

$$q = 15 \text{ кН/м};$$

$$a = 1 \text{ м}; b = 1,2; c = 0,8 \text{ м}; d = 1 \text{ м}$$

Рис. 5.2. Двохопорна балка

а) побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів;

Для побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів потрібно спочатку визначити опорні реакції балки, замінивши опори відповідними реакціями (рис. 5.3а) та записавши статичні умови рівноваги плоскої системи сил.

$$\sum M_A = 0; -q \cdot a \left(\frac{1}{2} a \right) + M + P(c + b) - R_B(b + c + d) = 0, \text{ звідки}$$

$$R_B = \frac{-q \cdot a \left(\frac{1}{2} a \right) + M + P(c + b)}{b + c + d} = \frac{-15 \text{ кН/м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 0,5 \text{ м} + 20 \text{ кН}\cdot\text{м} + 30 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м}}{3} = 24,17 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; -q \cdot a \left(\frac{1}{2} a + b + c + d \right) + M - P \cdot d + R_A(b + c + d) = 0, \text{ звідки}$$

$$R_A = \frac{q \cdot a \left(\frac{1}{2} a + b + c + d \right) - M + P \cdot d}{b + c + d} = \frac{15 \text{ кН/м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 3,5 \text{ м} - 20 \text{ кН}\cdot\text{м} + 30 \text{ кН} \cdot 1 \text{ м}}{3} = 20,83 \text{ кН}$$

Для перевірки записуємо рівняння суми проекцій всіх сил на вертикальну вісь:

$$\sum Y = R_A + R_B - P - q \cdot a = 20,83 \text{ кН} + 24,17 \text{ кН} - 30 \text{ кН} - 15 \text{ кН/м} \cdot 1 \text{ м} = 0.$$

Отже реакції опор R_A та R_B визначені правильно.

Розбиваємо балку на 4-и ділянки і визначаємо поперечні сили та згинальні моменти на них.

Ділянка I. $0 \leq x_I \leq a$.

Значення поперечної сили, $Q_I = -q \cdot x_I$

При $x_I = 0$, $Q_I = 0$.

При $x_I = a$; $Q_I = -15 \text{ кН/м} \cdot 1 \text{ м} = -15 \text{ кН}$.

Значення згинального моменту, $M_I = -\frac{1}{2}q \cdot x_I^2$

При $x_I = 0$, $M_I = 0$;

При $x_I = a$; $M_I = -\frac{1}{2} 15 \text{ кН/м} \cdot 1 \text{ м}^2 = -7,5 \text{ кНм}$.

Ділянка II. $a \leq x_2 \leq (a+b)$.

Значення поперечної сили, $Q_{II} = -q \cdot a + R_A$

При $x_2 = a$; $Q_{II} = -15 \text{ кН}$;

При $x_2 = a+b$; $Q_{II} = -15 \text{ кН} + 20,83 \text{ кН} = 5,83 \text{ кН}$.

Значення згинального моменту, $M_{II} = -q \cdot a \left(\frac{1}{2}a + x_2 - a \right) + R_A(x_2 - a)$

При $x_2 = a$, $M_{II} = -7,5 \text{ кНм}$;

При $x_2 = a+b$; $M_{II} = -15 \text{ кН/м} \cdot 1 \text{ м} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \text{ м} + 1,2 \text{ м} \right) + 20,83 \text{ кН} \cdot 1,2 \text{ м} = -0,5 \text{ кНм}$.

Ділянка III. $(a+b) \leq x_3 \leq (a+b+c)$.

Значення поперечної сили, $Q_{III} = -q \cdot a + R_A$

При $x_3 = a+b$; $Q_{III} = 5,83 \text{ кН}$;

При $x_3 = a+b+c$; $Q_{III} = 5,83 \text{ кН}$.

Значення згинального моменту, $M_{III} = -q \cdot a \left(\frac{1}{2}a + x_3 - a \right) + R_A(x_3 - a) + M$

При $x_3 = a+b$,

$M_{III} = -15 \text{ кН/м} \cdot 1 \text{ м} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \text{ м} + 1,2 \text{ м} \right) + 20,83 \text{ кН} \cdot 1,2 \text{ м} + 20 \text{ кНм} = 19,5 \text{ кНм}$;

При $x_3 = a+b+c$;

$M_{III} = -15 \text{ кН/м} \cdot 1 \text{ м} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \text{ м} + 2 \text{ м} \right) + 20,83 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} + 20 \text{ кНм} = 24,17 \text{ кНм}$.

Ділянка IV. $0 \leq x_4 \leq d$.

Для спрощення розрахунків розглянемо балку з правої сторони, тобто x_4 відкладаємо від опори в точці В.

Значення поперечної сили, $Q_{IV} = -R_B$

При $x_4 = 0$; $Q_{IV} = -24,17 \text{ кН}$;

При $x_4 = d$; $Q_{IV} = -24,17 \text{ кН}$.

Значення згинального моменту, $M_{IV} = R_B x_4$

При $x_4 = 0$; $M_{IV} = 0$ кНм;

При $x_4 = 0$; $M_{IV} = 24,17$ кНм;

За отриманими значеннями будуюмо епюри поперечних сил (рис. 5.3б) та моментів (рис. 5.3в). Значення моментів відкладаємо з боку розтягнутих волокон.

Отже, у небезпечному перерізі діє максимальний згинальний момент $M_{зг \max} = 24,17$ кНм.

б) із розрахунків на міцність підібрати двотавровий, круглий і прямокутний перерізи, прийнявши $b/h = 0,5$;

Для двотаврового перерізу

Визначаємо необхідний момент опору балки з умови міцності її при згині.

$$\sigma_{зг} = \frac{M_{зг \max}}{W_y} \leq [\sigma_{зг}]$$

$$W_y = \frac{M_{зг \max}}{[\sigma_{зг}]} = \frac{24,17 \times 10^3}{160 \times 10^6} = 151 \times 10^{-6} \text{ м}^3 = 151 \text{ см}^3$$

За стандартом вибираємо двотавр №18а, де $W_y = 159 \text{ см}^3$, площа поперечного перерізу двотавра

$$A_{дв} = 25,4 \text{ см}^2.$$

Для круглого перерізу $W_y = \frac{\pi d^3}{32}$,

$$\text{Отже діаметр перерізу } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_{y \min}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 151}{\pi}} = 11,5 \text{ см}$$

Приймаємо $d = 12 \text{ см}$.

Площа поперечного перерізу круга $A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4}$;

$$A_{кр} = 113 \text{ см}^2$$

Для прямокутного перерізу $W_y = \frac{bh^2}{6}$,

$$\text{Отже діаметр перерізу } h \geq \sqrt[3]{12 W_{y \min}} = \sqrt[3]{12 \times 151} = 12,2 \text{ см } b = 6,1 \text{ см}.$$

Площа поперечного перерізу $A_{пр} = b \cdot h$;

$$A_{пр} = 74,42 \text{ см}^2$$

в) порівняти масу одного довжини кожного профілю, якщо матеріал балки – сталь, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma_{зг}] = 160$ МПа.

Маса метра довжини кожного профілю будуть пропорційні відношенню площ поперечних перерізів, тобто:

$$G_{кр} : G_{пр} : G_{дв} = A_{кр} : A_{пр} : A_{дв} = 113 : 74,42 : 25,4 = 4,45 : 2,93 : 1.$$

Маса одного метра балки двотаврового перерізу буде легша від одного метра круглого перерізу у 4,45 рази, а від одного метра прямокутного перерізу у 2,93 рази.

Найбільш доцільний поперечний переріз для деформації згину – двотавровий.

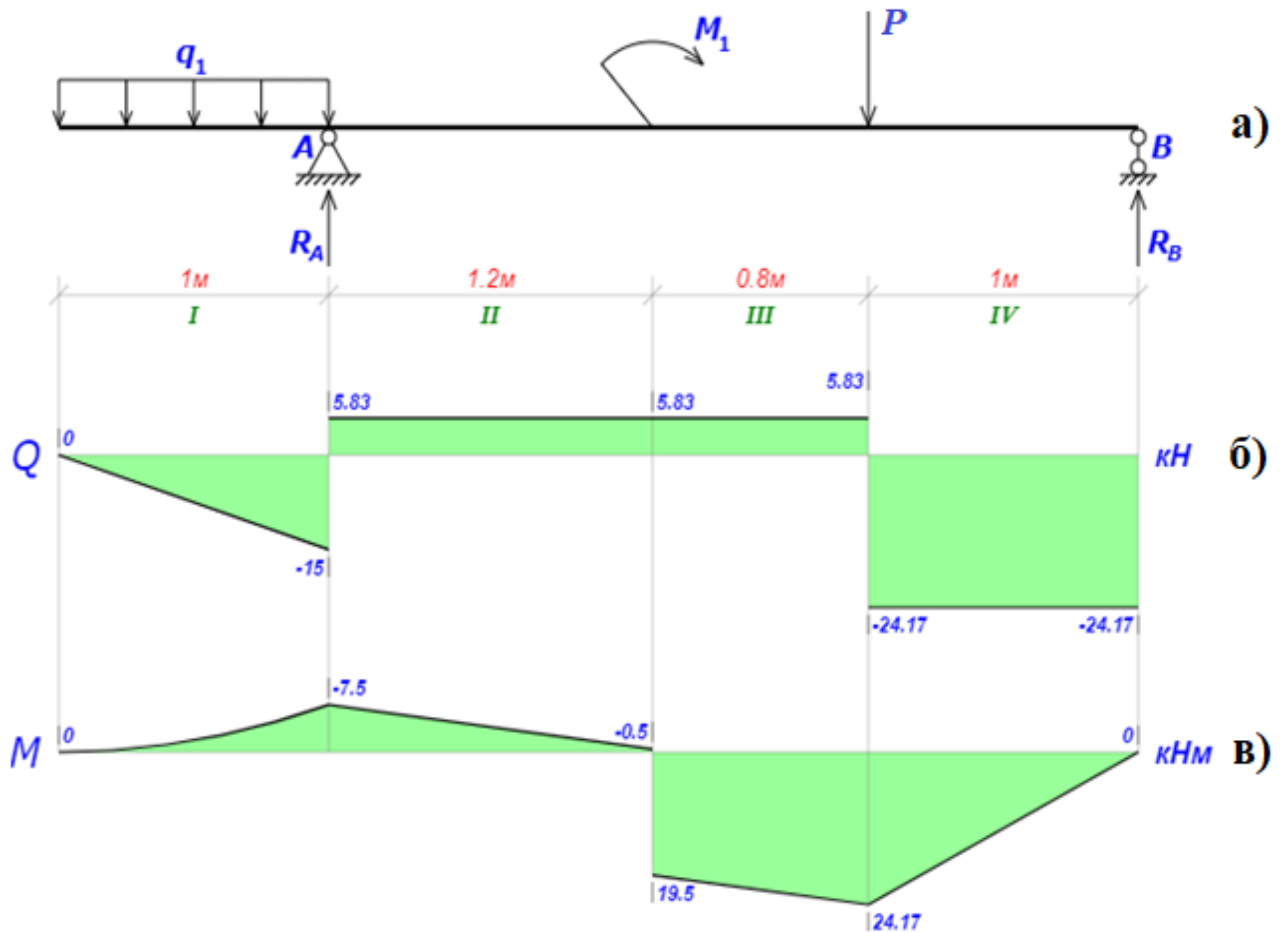


Рис. 5.3. Балка з реакціям опор – а); епюра поперечних сил – б); епюра згинальних моментів – в)

ДЛЯ НОТАТОК

[illegible]

Навчально-методична література

Ясній Володимир Петрович.

Методичні вказівки
до виконання розрахунково-графічних робіт

з дисципліни

Опір матеріалів

для студентів денної форми навчання за напрямом
192 «Будівництво та цивільна інженерія»

Комп'ютерне макетування та верстка *А.П. Катрич*

Формат 60x90/16. Обл. вид. арк. 0,56. Тираж 10 прим. Зам. № 3118.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4226 від 08.12.11.